

Научная статья

УДК 664.325+621.6.057.4

DOI 10.46845/1997-3071-2026-82-44-65

Динамика слива жидкости Шведова-Бингама из резервуара через цилиндрическую трубу (на примере рыбного жира)

Владимир Аркадьевич Наумов

Калининградский государственный технический университет, Калининград,
Россия

vladimir.naumov@klgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0560-5933>

Аннотация. В процессе очистки и применения рыбного жира (РЖ) нередко используется течение по трубопроводу под действием силы тяжести. Экспериментальные исследования ряда авторов показали, что реологические свойства РЖ хорошо описываются моделью вязко-пластичной жидкости Шведова-Бингама (ЖШБ), причем по мере очистки РЖ предельное напряжение σ и пластическая вязкость η уменьшаются. Особенностью задачи является снижение перепада давления по мере уменьшения глубины слоя ЖШБ в резервуаре. В результате характеристики движения ЖШБ (радиус и скорость квазитвердого течения, коэффициент Кориолиса и др.) изменяются в процессе слива. В общем случае динамика слива ЖШБ из резервуара через цилиндрическую трубу в нестационарной постановке описывается системой двух дифференциальных уравнений. Приведение этой системы уравнений к безразмерной форме позволило определить 6 критериев подобия поставленной задачи Коши: аналог числа Струхала Str , отношение длины всего трубопровода и его вертикальной части к исходной глубине ЖШБ в резервуаре (соответственно, l и a), модифицированное число Рейнольдса, отношение сил предельного касательного напряжения к силам тяжести Θ , отношение сил тяжести к силам инерции Ψ . Первые 3 критерия определяются геометрическими параметрами гидравлической системы, три последних зависят от реологических свойств ЖШБ. Задача Коши была решена численным методом. Результаты численного анализа показали, чем больше значение Str , тем меньшая скорость течения в трубе может быть достигнута и больше время ее достижения. При $Str < 1$ задачу можно решать в квазистационарном приближении. В качестве примера была решена задача динамики слива образцов РЖ сома из резервуара. Установлено, что время полного слива РЖ из резервуара уменьшается по стадиям очистки, причем для неочищенного РЖ это время значительно больше, чем у других образцов РЖ. Во всех исследованных условиях число Бингама оставалось больше единицы, что говорит о невозможности использования реологической модели ньютоновской жидкости.

Ключевые слова: рыбный жир, стадии очистки, модель Шведова-Бингама, динамика слива, задача Коши, критерии подобия, численный анализ.

Финансирование: исследование выполнено в рамках государственного задания НИОКР «Разработка и совершенствование производственных систем пищевой отрасли».

Для цитирования: Наумов В. А. Динамика слива жидкости Шведова-Бингама из резервуара через цилиндрическую трубу (на примере рыбного жира) // Известия КГТУ. 2026. № 82. С. 44–65. DOI 10.46845/1997-3071-2026-82-44-65.

Original article

Dynamics of Shvedov-Bingham liquid discharge from the tank through the cylindrical pipe (using fish oil as an example)

Vladimir A. Naumov

Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia

vladimir.naumov@klgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0560-5933>

Abstract. Gravity flow is often used in the process of cleaning and applying fish oil (FO). Experimental studies by a number of authors have shown that the rheological properties of FO are well described by the Shvedov-Bingham viscous-plastic fluid (SBL) model. Moreover, as the rye is cleaned, the limiting stress σ and the plastic viscosity η_n decrease. A special feature of the task is to reduce the pressure drop as the depth of the SBL layer in the tank decreases. As a result, the characteristics of the SBL motion (the radius and velocity of the quasi-solid flow, the Coriolis coefficient, etc.) change during the discharge process. In the general case, the dynamics of the discharge of liquid fuel from the tank through a cylindrical pipe in a non-stationary formulation is described by a system of two differential equations. Reducing this system of equations to a dimensionless form made it possible to determine 6 criteria for the similarity of the Cauchy problem: the analogue of the Strouhal number Str , the ratio of the length of the entire pipeline and its vertical part to the initial depth of the reservoir (respectively, l and a), the modified Reynolds number, the ratio of the forces of marginal tangential stress to gravity forces Θ , the ratio gravity to inertia forces. The first 3 criteria are determined by the geometric parameters of the hydraulic system, the last three depend on the rheological properties of the hydraulic fluid. The Cauchy problem has been solved numerically. The results of the numerical analysis shows that the higher the value of Str is, the lower the flow rate in the pipe can be achieved and the longer the time to achieve it. For $Str < 1$, the problem can be solved in the quasi-stationary approximation. As an example, the problem of dynamics of the discharge of FO samples from the tank has been solved. It has been found that the time for the complete discharge of FO from the tank decreases according to the stages of purification. Moreover, for unpeeled FO, this time is much longer than for other OF samples. In all the conditions studied, the Bingham number remained large, which indicates the impossibility of using the rheological model of a Newtonian fluid.

Keywords: fish oil, purification stages, Shvedov-Bingham model, drain dynamics, Cauchy problem, similarity criteria, numerical analysis.

Funding: the research was carried out within the framework of the state assignment of research and development work "Development and improvement of food industry production systems".

For citation: Naumov V. A. Dynamics of Shvedov-Bingham liquid discharge from the tank through the cylindrical pipe (using fish oil as an example). *Izvestiya KGTU = KSTU News*. 2026;(82):44–65. (In Russ.). DOI 10.46845/1997-3071-2026-82-44-65.

ВВЕДЕНИЕ

Значимость рыбного жира (РЖ) как важной добавки в питании человека в настоящее время не подвергается сомнению [1–3]. Многочисленные исследования направлены на совершенствование технологических процессов производства и изучение свойств РЖ [4–7]. Интересные и перспективные для широкого применения исследования проводятся в направлении использования РЖ для подкормки животных [8–10]. Последнее время заметно больше исследований, направленных на усовершенствование оборудования для производства и применения РЖ [11–13], в том числе насосного оборудования для трубопроводного транспортирования РЖ [14, 15]. Однако вне внимания исследователей остался нередко используемый процесс самотечного движения РЖ по трубопроводу (под действием силы тяжести).

Необходимо отметить, что РЖ относится к неньютоновским жидкостям. Исследования [15–17] показали, что реологические свойства РЖ хорошо описываются моделью Шведова-Бингама:

$$\sigma_v = \sigma + \eta \cdot \omega, \quad (1)$$

где σ_v – касательное напряжение, Па; σ – предельное напряжение сдвига, Па; η – пластическая (динамическая) вязкость, Па·с; ω – сдвиг (градиент) скорости, с⁻¹.

Свойства жидкости Шведова-Бингама (ЖШБ) довольно хорошо изучены, они включены в учебники и учебные пособия. Современные исследования касаются различных течений ЖШБ в сложных условиях, в том числе в технологических аппаратах и установках. Так, монография [18] посвящена проблеме исследования течений ЖШБ в каналах и полостях с изменяемыми по времени и пространству формами их стенок. Результаты исследования могут быть использованы в проектных расчетах проточных частей агрегатов с деформируемыми рабочими органами.

В [19] приближенным методом решена задача Гретца-Нуссельта для неизотермического течения ЖШБ в цилиндрической трубе. Решение получено в виде ряда Фурье-Бесселя. Учитывалось внутреннее тепловыделение за счет вязкой диссипации. Получены выражения для температуры и локального числа Нуссельта. Представлены результаты численного анализа решения.

В [20] модель Шведова-Бингама использована для исследования течения битумного вяжущего в цилиндрической трубе; определена зависимость расхода ЖШБ от перепада давления, получены зависимости для радиального профиля продольной скорости и эффективной вязкости течения. Авторы констатируют справедливость известного вывода: при малых числах Бингама ($Bn < 0,1$) можно использовать в расчетах модель ньютоновской жидкости.

В [21] были рассмотрены течения ЖШБ в сходящихся и расходящихся (линейно или экспоненциально) трубах. Теоретически исследовано влияние формы стенки на перепад давления и на поверхность, которая отделяет область квазитвердого течения от периферийной области. Результаты показывают, что влияние амплитуды изменения стенки значительно усиливается с увеличением объемного расхода (или создаваемой разности давлений). Показано, что разность давлений, необходимая для достижения заданного объемного расхода в сужающейся трубе, выше, чем в расширяющейся.

В [22] течение в процессе формования гипсокартона описано с помощью модели ЖШБ. Найдены предельные значения перепадов давления, при которых реализуется один из трех возможных режимов течения ЖШБ (чисто пластическое течение; пластическое и вязкое течения одновременно; неподвижность среды). Получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений и скорости течения ЖШБ. Авторы полагают, что полученные формулы для перепада давления и объемного расхода гипсовой смеси в рамках модели ЖШБ позволят управлять процессом формования листового гипсокартона.

В [23] предпринята попытка определения закономерностей течения бетонных и растворных смесей на основе модели Шведова-Бингама с изменяющейся вязкостью при протекании ЖШБ по длинным круглым трубам, причем вязкость Бингама должна определяться экспериментально. На основе уравнения Букингема-Рейнера найдены зависимости для описания рабочего процесса подачи бетонных и растворных смесей по круглым трубам в режиме ламинарного течения. Приведены зависимости определения расхода и требуемой мощности при непрерывной подаче бетонных и растворных смесей по трубопроводу, а также при изменении давления на входе.

Задача, наиболее близкая рассматриваемой в данной статье, была решена в работах [24, 25]. Рассмотрен нестационарный слив ЖШБ из резервуара через цилиндрическую трубу под действием силы тяжести. Задача решена аналитически, получена формула для времени полного слива ЖШБ из резервуара. При решении величина радиуса квазитвердого течения ЖШБ в центральной части трубы считалась неизменной ($R_0 = \text{const}$), однако известно [18–20], что эта величина зависит от перепада давления на длине трубы. Перепад давления уменьшается по мере уменьшения глубины слоя ЖШБ в резервуаре H , поэтому полученные в [24] результаты будут справедливы в ограниченных условиях. Кроме того, авторы использовали гипотезу квазистационарного течения, не доказав ее справедливости. Приведено только размерное решение, критерии подобия задачи не определены.

В [26] задача истечения из резервуара через цилиндрическую трубу была решена численным методом в нестационарной постановке, найдены критерии подобия, но только для степенной жидкости, причем считалось, что уровень жидкости в резервуаре поддерживался постоянный.

Целью данной статьи является разработка математической модели динамики слива ЖШБ из резервуара через цилиндрическую трубу в нестационарной постановке, включая определение критериев подобия задачи и анализ их влияния на истечение (на примере рыбного жира).

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим истечение РЖ из емкости 1 по трубопроводу 2 (рис. 1). Предварительно труба была заполнена продуктом. В начальный момент задвижка 3 была мгновенно открыта, и началось истечение РЖ. Как было указано выше, для описания реологических свойств РЖ можно использовать модель ЖШБ – формулу (1).

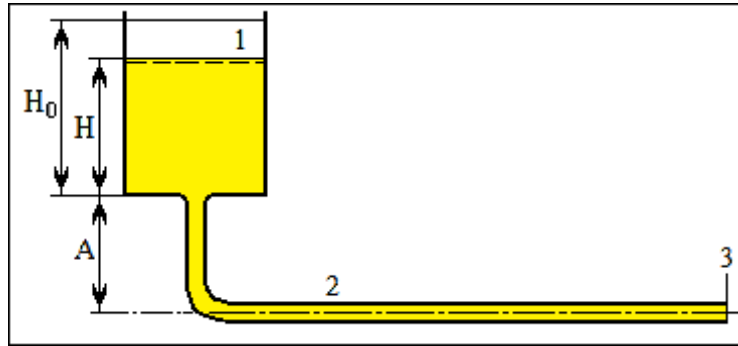


Рис. 1. Гидравлическая схема слива РЖ из резервуара:

1 – резервуар с РЖ, 2 – трубопровод, 3 – задвижка

Fig. 1. Hydraulic scheme for draining FO from the tank:

1 – tank with FO, 2 – pipeline, 3 – valve

Течение ЖШБ в круглой трубе хорошо изучено. Радиус квазитвердого течения ЖШБ в центре круглой трубы определяется по известной формуле [18–21]:

$$R_0 = 2\sigma \cdot |\Delta L / \Delta P|. \quad (2)$$

Как в [24, 25], модуль перепада давления на длине трубопровода L считаем по высоте столба жидкости:

$$|\Delta P| / \Delta L = \rho \cdot g \cdot (H + A) / L = \rho \cdot g \cdot H_0 \cdot (h + a) / L, \quad (3)$$

где H – слой жидкости в емкости, который в начальный момент времени равен H_0 , а в дальнейшем уменьшается; $h = H/H_0$, $a = A/H_0$.

Подставив (3) в (2), получим для относительной величины радиуса

$$r_0 = R_0 / R = \Theta \cdot / (h + a), \quad \Theta = 4\sigma \cdot L / (\rho \cdot g \cdot d \cdot H_0), \quad (4)$$

где $R = 0,5d$ – внутренний радиус трубы, м; Θ – безразмерный комплекс. Видно, что со снижением h в процессе слива жидкости величина r_0 будет уменьшаться.

Средняя (по расходу) скорость ЖШБ в круглой трубе определяются по известной формуле Букингема-Рейнера:

$$W = (1/32) \cdot |\Delta P / \Delta L| \cdot (d^2 / \eta) \cdot [1 - (4/3) \cdot (r_0) + (1/3) \cdot (r_0)^4]. \quad (5)$$

Если бы жидкость была ньютоновской ($\sigma = 0$), из формулы (5) с учетом (3) получается скорость при начальной глубине слоя жидкости ($H = H_0$):

$$W_M = W_{M0} (1 + a), \quad W_{M0} = (1/32) \cdot d^2 \cdot \rho \cdot g \cdot H_0 / (L \cdot \eta). \quad (6)$$

Величину W_{M0} примем в качестве характерного значения скорости, тогда из (5) и (6) следует формула для безразмерной средней скорости течения ЖШБ в цилиндрической трубе:

$$w = W / W_{M0} = [1 - (4/3) \cdot (r_0) + (1/3) \cdot (r_0)^4] \cdot (h + a). \quad (7)$$

Скорость центральной части течения ЖШБ в трубе [18, 19]:

$$U_0 = (1/16) \cdot |\Delta P / \Delta L| \cdot d^2 \cdot (1 - r_0)^2 / \eta. \quad (8)$$

Запишем (8) в безразмерной форме:

$$u_0 = U_0 / W_{M0} = 2 \cdot (1 - r_0)^2 \cdot (h + a) = 2 \cdot [1 - \Theta / (h + a)]^2 \cdot (h + a). \quad (9)$$

Безразмерная скорость в периферийной части течения ЖШБ в трубе:

$$u = U / W_{M0} = 2 \cdot [(1 - r^2) \cdot (h + a) - 2 \cdot \Theta \cdot (1 - r)], \quad (10)$$

где $r = 2R/d$ – относительный локальный радиус.

Полагаем, что на всем протяжении потока скорость движения жидкости одинакова и плавно изменяется по времени вместе с изменением глубины слоя ЖШБ в резервуаре. Тогда нестационарное уравнение Бернулли представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка [26, 27]:

$$\frac{L}{g} \cdot \frac{dW}{dt} = (H(t) + A) - H_L(W) - \alpha \cdot \frac{W^2}{2g}, \quad W(0) = 0, \quad (11)$$

где L – общая длина трубопровода, м; g – ускорение свободного падения м/с²; $W = 4Q/(\pi d^2)$ – средняя (по расходу Q) скорость движения ЖШБ, м/с; d – внутренний диаметр трубы, м; H – уровень ЖШБ в емкости в момент времени t , м; α – коэффициент неравномерности профиля продольной скорости U (коэффициент Кориолиса); H_L – потери напора по длине трубопровода, м:

$$H_L = 0,5 \lambda L/d W^2/g, \quad (12)$$

где λ – безразмерный коэффициент потерь напора из-за трения по длине трубы.

В данной статье полагаем, что гидравлические потери в местных сопротивлениях (плавный вход в трубопровод, плавный поворот, полностью открытая задвижка) малы по сравнению с потерями по длине трубопровода, ими можно пренебречь. В противном случае можно заменить фактическую длину трубы эквивалентной длиной, учитывающей эти потери.

В [28, 29] экспериментально и теоретически было показано, что коэффициент потерь λ при течении неньютоновских жидкостей в трубопроводе можно находить по формулам ньютоновской жидкости, но вместо обычных чисел Рейнольдса следует подставлять модифицированное значение, для ЖШБ – Re_B [28]:

$$\lambda = 64/Re_B, \quad Re_B = \frac{W \cdot d \cdot \rho}{\frac{\sigma \cdot d}{8 \cdot W} + \eta \cdot \left(\frac{3m+1}{4m} \right)} = \frac{w \cdot Re_0}{\frac{\Theta}{w} + \left(\frac{3m+1}{4m} \right)}. \quad (13)$$

$$Re_0 = \frac{W_{M0} \cdot d \cdot \rho}{\eta}, \quad m = \frac{8W \cdot \eta / d}{8W \cdot \eta / d + \sigma} = \frac{1}{1 + \Theta / w}. \quad (14)$$

Кроме числа Рейнольдса Re_B , для характеристики течения ЖШБ будем использовать число Бингама Bn :

$$Bn = \frac{\sigma \cdot d}{\eta \cdot W} = \frac{8 \cdot \Theta}{w}. \quad (15)$$

Динамика уменьшения объема жидкости V в емкости описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{L}{g} \cdot \frac{dV}{dt} = -Q \quad \text{или} \quad S_1 \cdot \frac{dH}{dt} = -W \cdot S_0, \quad H(0) = H_0, \quad (16)$$

где $S_0 = 0,25 \cdot \pi d^2 = \text{const}$ – площадь поперечного сечения трубопровода, м²; $S_1 = \text{const}$ – площадь поперечного сечения емкости, м².

Запишем систему дифференциальных уравнений в безразмерной форме:

$$Str \cdot \frac{dw}{d\tau} = \Psi \cdot (h + a) - \left(\alpha + \frac{64}{Re_B} \cdot l \right) \cdot w^2, \quad w(0) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = -w, \quad h(0) = 1, \quad (18)$$

$$Str = \frac{2L \cdot S_0}{S_1 \cdot H_0}, \quad l = \frac{L}{d}, \quad \Psi = \frac{2g \cdot H_0}{W_{M0}^2}, \quad (19)$$

где $\tau = t/t_z$ – безразмерное время, $t_z = S_1 \cdot H_0 / (S_0 \cdot W_{M0})$, с.

В уравнении (17) необходимо определить коэффициент Кориолиса α , который в цилиндрической трубе рассчитывается по известной формуле:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \int_0^R (U(Y))^3 \cdot Y dY}{W^3 \cdot R^2} = \frac{2 \cdot \int_0^1 (u(r))^3 \cdot r dr}{w^3}, \quad (20)$$

где $R_0 = d/2$ – внутренний радиус трубы, м; R – текущий радиус, м; $U(R)$ – зависимость продольной скорости жидкости от текущего радиуса, м/с.

Квазистационарное приближение предполагает, что можно положить $Str=0$. Тогда дифференциальное уравнение (17) вырождается в равенство, из которого безразмерная средняя скорость выражается следующим образом:

$$w = \sqrt{\frac{\Psi \cdot (h + a)}{\alpha + 64 \cdot l / Re_B}}. \quad (21)$$

Заметим, что и α , и Re_B зависят от w , поэтому (20) является алгебраическим уравнением. Выражение (20) подставляется в (18). В квазистационарном приближении задача Коши включает только одно дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh}{d\tau} = - \sqrt{\frac{\Psi \cdot (h + a)}{\alpha + 64 \cdot l / Re_B}}, \quad h(0) = 1. \quad (22)$$

Задача Коши (22), как и (17)–(18), не имеет аналитического решения. Решение было найдено численным методом с помощью специальной программы в среде Mathcad, для чего необходимо задать значения параметров, в том числе предельное касательное напряжение σ_0 и динамическую вязкость Бингама η для РЖ. Известно, что величины σ и η зависят от степени (стадии) очистки РЖ. Сырой РЖ (до очистки) обозначим РЖС, после дегуммирования – РЖГ, после нейтрализации – РЖН, после отбеливания – РЖО, после дезодорации – РЖД. В [16] экспериментально исследована вязкость РЖ сома (Catfish Oils) при температуре $T = 25^\circ\text{C}$ в различных стадиях очистки. Сдвиг скорости изменялся от нуля до 1200 c^{-1} . В табл. 1 представлены найденные в [16] реологические параметры РЖ (2-й и 3-й столбцы).

Таблица 1. Параметры модели и критерии подобия для РЖ сома
Table 1. Model parameters and similarity criteria for Catfish Oils

Стадия		σ , Па	η , Па·с	W_{M0} , м/с	Θ	Ψ	Re_0
РЖС	FOU	4,79	0,042	0,536	0,798	34,1	375
РЖГ	FOG	2,41	0,033	0,682	0,401	21,0	608
РЖН	FON	2,42	0,030	0,750	0,403	17,4	735
РЖО	FOB	2,08	0,026	0,866	0,347	13,1	978
РЖД	FOD	1,40	0,024	0,938	0,233	11,1	1149

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Постановка задачи в безразмерной форме показала, что рассматриваемая задача имеет 6 критериев подобия: Str , l , a , Ψ , Θ , Re_0 . Из них только три последних зависят от свойств РЖ. Первые 3 критерия определяются геометрическими параметрами гидравлической системы. Аналог числа Струхала представляет собой от-

ношение удвоенного объема РЖ в трубопроводе к начальному объему РЖ в резервуаре; l – отношение длины трубопровода к его внутреннему диаметру, a – отношение длины вертикальной части трубопровода к начальной глубине РЖ в резервуаре.

По формулам (13), (15) видно, что обычно применяемые для характеристики течения числа Рейнольдса Re_v и Бингама Bn изменяются в процессе слива РЖ из резервуара.

При полном освобождении резервуара ($h = 0$) из условия течения ЖШБ в трубе ($r_0 \leq 1$) следует условие, которому должна удовлетворять длина вертикального участка трубы: $a \geq \Theta$. В противном случае снижение уровня ЖШБ произойдет лишь до уровня $h = \Theta - a$ и прекратится.

По формуле (4) безразмерный радиус квазитвердого течения в центре трубы (БРЦТ) r_0 прямо пропорционален критерию подобия Θ и растет с уменьшением безразмерной глубины слоя в резервуаре h , что иллюстрируется рис. 2. Если $a = 0,25$, то при уменьшении h от 1 до 0 величина r_0 возрастает в 5 раз; если $a = 0,8$ – в 2,25 раза. Чтобы это увеличение составило 10 % и менее, должно выполняться условие $a > 10$. Следовательно, предположение [24] о постоянстве r_0 справедливо только при достаточно большой длине вертикальной части трубопровода.

На рис. 3 представлены результаты расчета безразмерной скорости квазитвердого течения в центре трубы (БСЦТ) u_0 по формуле (9). Величины $u_0 > 1$ объясняются тем, что в качестве характерной скорости выбрано значение W_{M0} (при $a=0$). Чем больше слой ЖШБ в резервуаре или длина вертикальной части трубопровода, тем больше перепад давления в формуле (8). Соответственно, возрастает u_0 на рис. 3. Рост значения Θ приводит к уменьшению БСЦТ, это происходит, в частности, при увеличении общей длины трубопровода, значит, уменьшении $|\Delta P/\Delta L|$. На рис. 3а при $\Theta=0,07$ полное освобождение резервуара приводит к уменьшению БСЦТ с $u_0 = 2,73$ до $u_0 = 0,74$ (в 3,7 раза), тогда как при $\Theta=0,5$ – с 1,92 до 0,16 (в 12 раз). На рис. 3б при $a=0,5$ полное освобождение резервуара приводит к уменьшению БСЦТ с $u_0 = 2,25$ до $u_0 = 0,36$ (примерно в 6,3 раза), тогда как при $a=0,9$ – с 3,04 до 1,09 (в 2,8 раза).

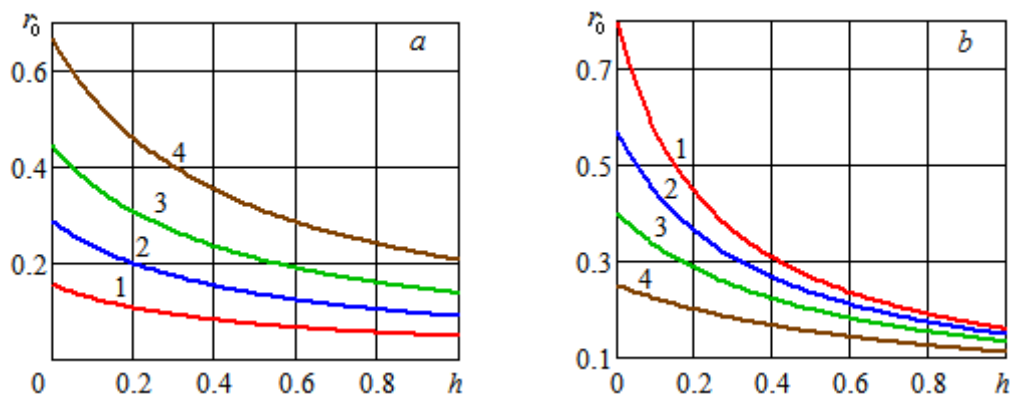


Рис. 2. Зависимость БРЦТ от относительной глубины слоя ЖШБ:
а – при $a = 0,45$ и различных Θ : 1 – $\Theta=0,07$; 2 – $\Theta=0,13$; 3 – $\Theta=0,2$; 4 – $\Theta=0,3$;
б – при $\Theta=0,2$ и различных a : 1 – $a=0,25$; 2 – $a=0,35$; 3 – $a=0,5$; 4 – $a=0,8$
Fig. 2. Dependence of DRCP on the relative depth of the SBL layer:
а – when $a = 0.45$ and various Θ : 1 – $\Theta=0.07$; 2 – $\Theta=0.13$; 3 – $\Theta=0.2$; 4 – $\Theta=0.3$;
б – when $\Theta=0.2$ and different a : 1 – $a=0.25$; 2 – $a=0.35$; 3 – $a=0.5$; 4 – $a=0.8$

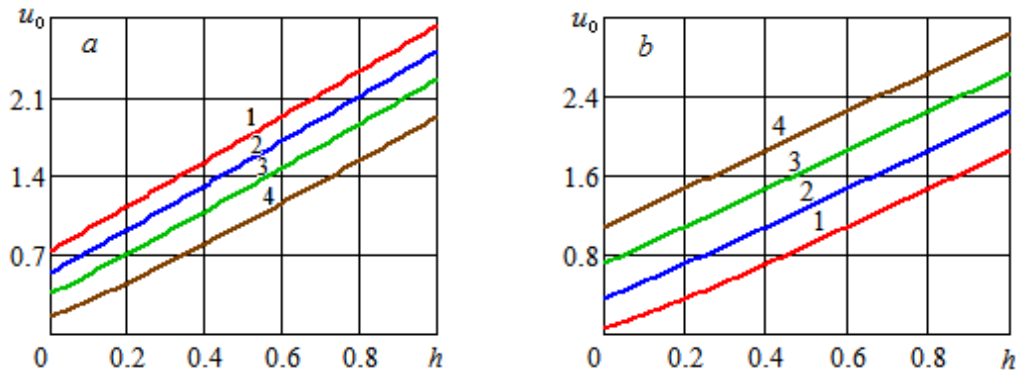


Рис. 3. Зависимость БСЦТ от относительной глубины слоя ЖШБ:
а – при $a = 0,5$ и различных Θ : 1 – $\Theta=0,07$; 2 – $\Theta=0,13$; 3 – $\Theta=0,2$; 4 – $\Theta=0,3$;
б – при $\Theta=0,2$ и различных a : 1 – $a = 0,3$; 2 – $a = 0,5$; 3 – $a = 0,7$; 4 – $a = 0,9$
Fig. 3. Dependence of DSCP on the relative depth of the SBL layer:
а – when $a = 0.5$ and different Θ : 1 – $\Theta=0.07$; 2 – $\Theta=0.13$; 3 – $\Theta=0.2$; 4 – $\Theta=0.3$;
б – when $\Theta=0.2$ and different a : 1 – $a = 0.3$; 2 – $a = 0.5$; 3 – $a = 0.7$; 4 – $a = 0.9$

На рис. 4 показаны профили безразмерной продольной скорости течения ЖШБ в цилиндрической трубе, рассчитанные при разных значениях a и Θ . С увеличением a и уменьшением Θ происходит снижение БРЦТ и возрастание БСЦТ. При $\Theta=0$ получится параболический профиль скорости ньютоновской жидкости.

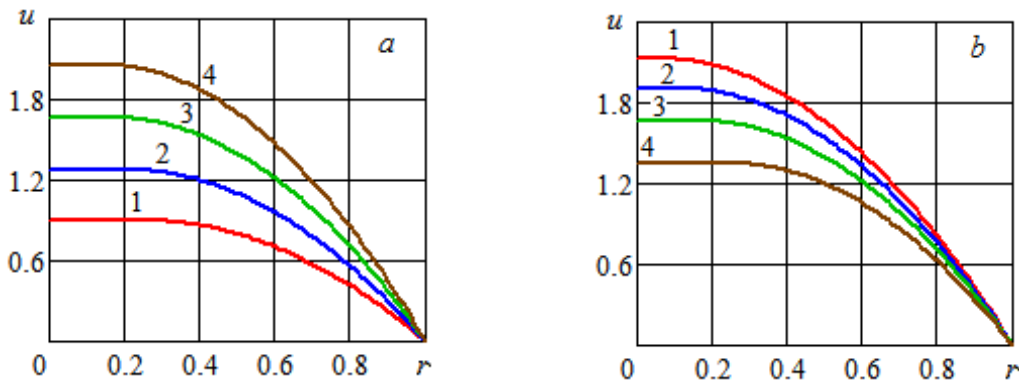


Рис. 4. Профили безразмерной продольной скорости ЖШБ в трубе:
а – при $h=0,5$, $\Theta=0,2$, и разных a : 1 – $a=0,3$; 2 – $a=0,5$; 3 – $a=0,7$; 4 – $a=0,9$;
б – при $h=0,5$, $a=0,4$ и разных Θ : 1 – $\Theta=0,07$; 2 – $\Theta=0,13$; 3 – $\Theta=0,2$; 4 – $\Theta=0,3$
Fig. 4. Profiles of the dimensionless longitudinal velocity SBL in the pipe:
а – at $h=0.5$, $\Theta=0.2$, and different a : 1 – $a=0.3$; 2 – $a=0.5$; 3 – $a=0.7$; 4 – $a=0.9$;
б – at $h=0.5$, $a=0.4$ and different Θ : 1 – $\Theta=0.07$; 2 – $\Theta=0.13$; 3 – $\Theta=0.2$; 4 – $\Theta=0.3$

На рис. 5 представлена рассчитанная по формуле (7) зависимость безразмерной средней скорости w от относительной глубины при разных значениях a и Θ . Чем больше h и a , тем больше располагаемый напор, поэтому и w будет больше. Увеличение же Θ , в том числе из-за повышения σ_0 , ведет к возрастанию потерь энергии и снижению средней скорости. На рис. 5а при $\Theta=0,05$ полное освобождение резервуара приводит к уменьшению w с 1,33 до 0,33 (в 4 раза), тогда как при

$\Theta = 0,4$ – с 1,12 до 0,13 (в 8,7 раз). На рис. 5b при $a = 0,5$ полное освобождение резервуара приводит к уменьшению w с 1,167 до 0,177 (в 6,6 раз), тогда как при $a = 0,9$ – с 1,57 до 0,57 (примерно в 2,8 раза).

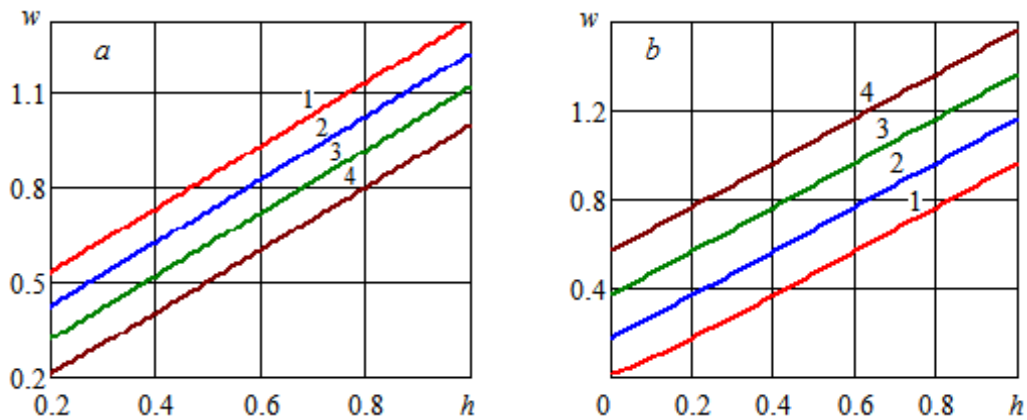


Рис. 5. Зависимость безразмерной средней скорости от относительной глубины:
 а – при $a = 0,45$ и разных Θ : 1 – $\Theta = 0,05$; 2 – $\Theta = 0,13$; 3 – $\Theta = 0,2$; 4 – $\Theta = 0,3$;
 б – при $\Theta = 0,25$ и разных a : 1 – $a = 0,3$; 2 – $a = 0,5$; 3 – $a = 0,7$; 4 – $a = 0,9$
 Fig. 5. Dependence of the dimensionless average speed on the relative depth:
 а – at $a = 0.45$ and different Θ : 1 – $\Theta = 0.05$; 2 – $\Theta = 0.13$; 3 – $\Theta = 0.2$; 4 – $\Theta = 0.3$;
 б – at $\Theta = 0.25$ and different a : 1 – $a = 0.3$; 2 – $a = 0.5$; 3 – $a = 0.7$; 4 – $a = 0.9$

На рис. 6 представлена рассчитанная по формуле (14) зависимость безразмерной величины m от относительной глубины при разных значениях a и Θ . Увеличение h и a ведет к росту m , а Θ – к снижению. Значение m при $\Theta = 0,2$, $a = 0,25$, $h = 0$ равно всего 0,08; тогда как при $\Theta = 0,05$, $a = 1,5$, $h = 1$ близко к единице ($m = 0,98$).

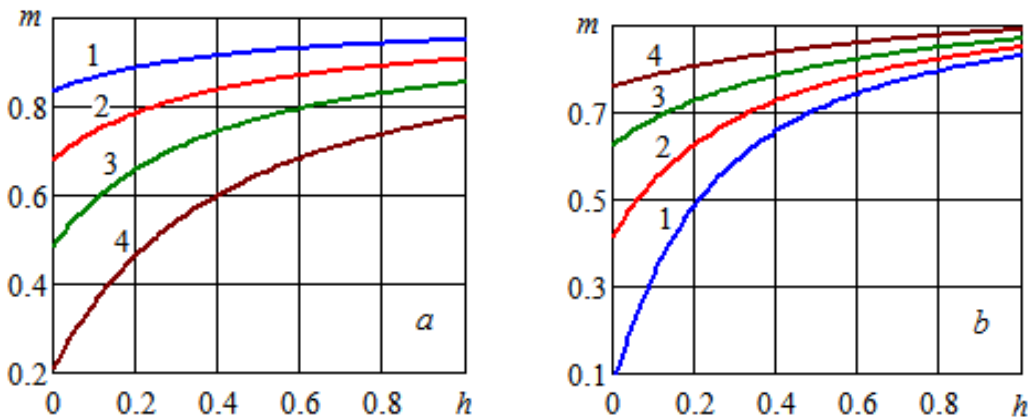


Рис. 6. Зависимость показателя m от относительной глубины слоя:
 а – при $a = 0,45$ и разных Θ : 1 – $\Theta = 0,07$; 2 – $\Theta = 0,13$; 3 – $\Theta = 0,2$; 4 – $\Theta = 0,3$;
 б – при $\Theta = 0,2$ и разных a : 1 – $a = 0,25$; 2 – $a = 0,4$; 3 – $a = 0,6$; 4 – $a = 0,9$
 Fig. 6. Dependence of m index on the relative depth of the layer:
 а – at $a = 0.45$ and different Θ : 1 – $\Theta = 0.07$; 2 – $\Theta = 0.13$; 3 – $\Theta = 0.2$; 4 – $\Theta = 0.3$;
 б – at $\Theta = 0.2$ and different a : 1 – $a = 0.25$; 2 – $a = 0.4$; 3 – $a = 0.6$; 4 – $a = 0.9$

На рис. 7 представлена рассчитанная по формуле (14) зависимость коэффициента Кориолиса от относительной глубины при разных значениях a и Θ .

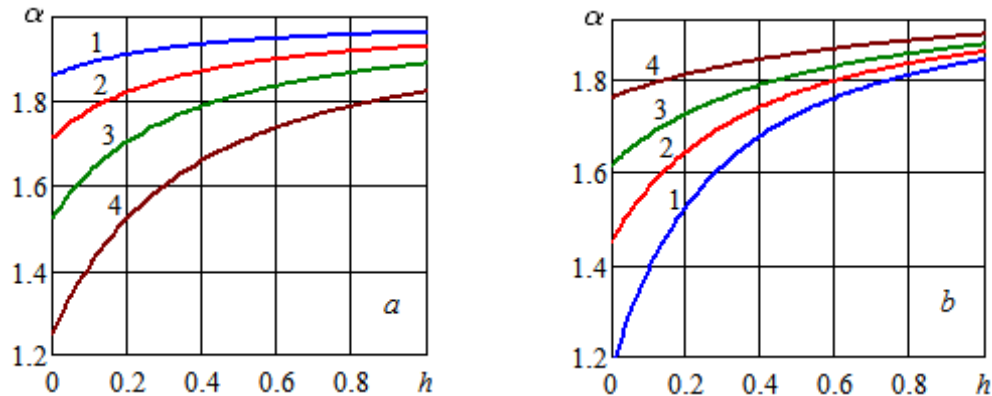


Рис. 7. Зависимость коэффициента Кориолиса от относительной глубины слоя:
 a – при $a=0,4$ и разных Θ : 1 – $\Theta=0,07$; 2 – $\Theta=0,13$; 3 – $\Theta=0,2$; 4 – $\Theta=0,3$;

b – при $\Theta=0,25$ и разных a : 1 – $a=0,3$; 2 – $a=0,45$; 3 – $a=0,6$; 4 – $a=0,9$

Fig. 7. Dependence of the Coriolis coefficient on the relative depth of the layer:

a – at $a=0.4$ and different Θ : 1 – $\Theta=0.07$; 2 – $\Theta=0.13$; 3 – $\Theta=0.2$; 4 – $\Theta=0.3$;

b – at $\Theta=0.25$ and different a : 1 – $a=0.3$; 2 – $a=0.45$; 3 – $a=0.6$; 4 – $a=0.9$

Как было указано выше, увеличение h и a (или уменьшение Θ) ведет к росту u_0 и снижению r_0 ; в результате профиль продольной скорости стремится к параболической форме, $\alpha \rightarrow 2$ (рис. 4). При уменьшении h и a (увеличении Θ) $\alpha \rightarrow 1$. Так $\alpha=1,99$ при $\Theta=0,05$, $a=2,4$, $h=1$; $\alpha=1,16$ при $\Theta=0,25$, $a=0,3$, $h=0$.

На рис. 8 и 9 представлены результаты решения численным методом задачи Коши (17)–(18) при следующих значениях критериев подобия $a=0,5$; $\Psi=6$; $l=50$; $Re_0=160$; $\Theta=0,3$ и различных величинах Str .

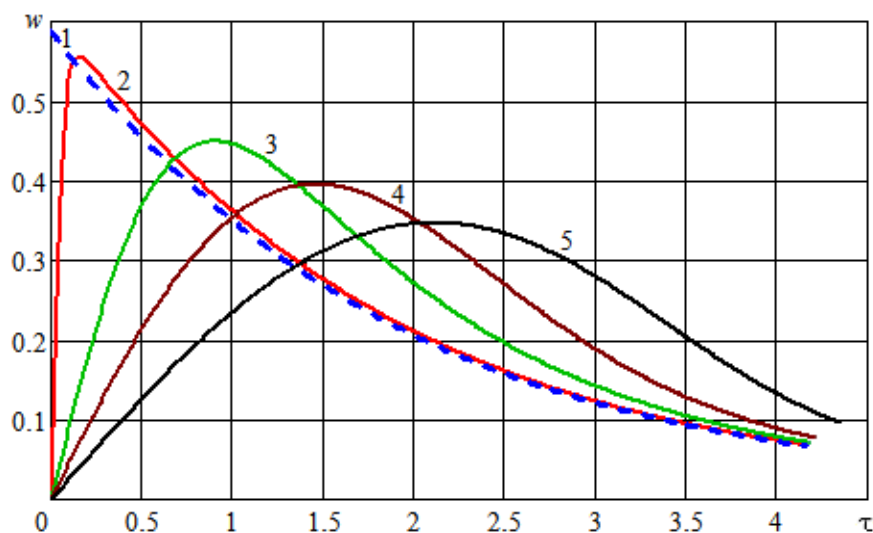


Рис. 8. Динамика средней скорости течения ЖШБ в трубе при разных значениях Str : 1 – $Str=0$, 2 – $Str=1$, 3 – $Str=10$; 4 – $Str=20$, 5 – $Str=35$

Fig. 8. Dynamics of the average velocity of the SBL flow in the pipe at different values Str : 1 – $Str=0$, 2 – $Str=1$, 3 – $Str=10$; 4 – $Str=20$, 5 – $Str=35$

Штриховыми линиями 1 показан результат решения задачи в квазистационарном приближении (22). Видно, что отличие штриховых линий на рис. 8 и 9 от линий 1 ($Str=0$) мало. Следовательно, если $Str \approx 1$ и менее, то задачу можно решать в квазистационарном приближении. Качественно этот результат согласуется с выводом [27], сделанным при анализе нестационарной математической модели простой гидравлической сети с центробежным насосом. Однако в [27] условие применения квазистационарного приближения было получено более жестким $Str \leq 0,1$.

Увеличение Str говорит о возрастании инерционности гидравлической системы. Больше времени τ_m затрачивается на увеличение скорости течения до максимума, а значения максимума w_m снижаются: $\tau_m=0,16$, $w_m=0,55$ при $Str=1$; $\tau_m=0,90$, $w_m=0,45$ при $Str=10$; $\tau_m=1,47$, $w_m=0,39$ при $Str=20$; $\tau_m=2,12$, $w_m=0,35$ при $Str=35$. Динамика снижения уровня ЖШБ в резервуаре также сильно зависит от Str .

На рис. 9, если $\tau=2$, то при $Str=1$ глубина слоя $h=0,27$, при $Str=10$ – $h=0,32$, при $Str=20$ – $h=0,42$, при $Str=35$ – $h=0,57$. Однако в указанных условиях продолжительность полного слива ЖШБ из резервуара τ_E отличается незначительно: $\tau_E=4,19$ при $Str=1$; $\tau_E=4,37$ при $Str=35$ (увеличение всего на 4,4 %).

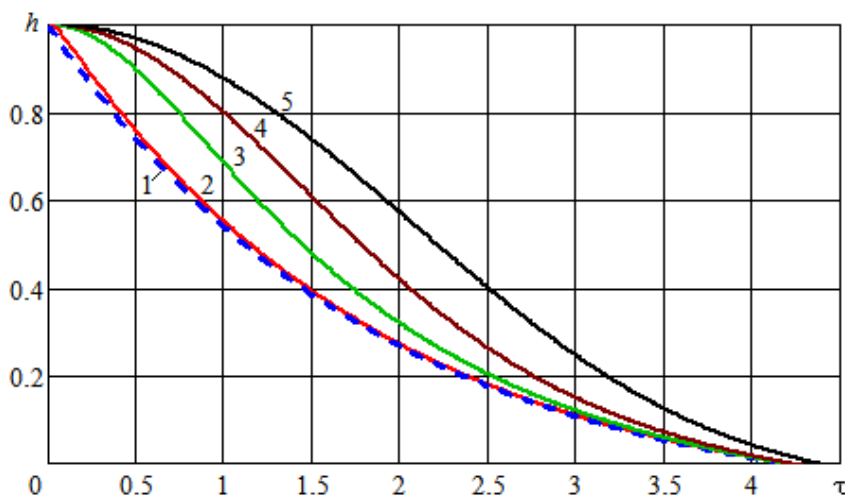


Рис. 9. Динамика уровня ЖШБ в резервуаре. Условия и обозначения, как на рис. 8
Fig. 9. Dynamics of the SBL level in the reservoir. Terms and designations, as shown in Fig. 8

На рис. 10, 11 представлены результаты решения квазистационарной задачи Коши (22) численным методом при $a=0,4$; $\Psi=6$; $l=50$; $Re_0=160$ и разных значениях Ψ . Согласно (19), критерий Ψ характеризует отношение сил тяжести к силам инерции. По рис. 10 начальная средняя скорость заметно увеличивается с ростом Ψ . Так, $w(0)=0,35$ при $\Psi=2$; $w(0)=0,49$ при $\Psi=4$; $w(0)=0,69$ при $\Psi=8$; $w(0)=0,98$ при $\Psi=16$. При этом безразмерное время полного слива ЖШБ из резервуара τ_E по рис. 11 уменьшается и составляет, соответственно, 6,71; 4,74; 3,36; 2,37.

Далее рассмотрим пример расчета, когда бингамовской жидкостью является РЖ при следующих размерных параметрах: $L=6$ м, $d=3$ см, $H_0=50$ см, $S_1=0,06$ м². Значения критериев подобия, не зависящих от свойств РЖ: $l=200$, $Str=0,283 < 1$, поэтому задачу можно решать в квазистационарном приближении. Величина $a=A/H_0$ будет варьировать.

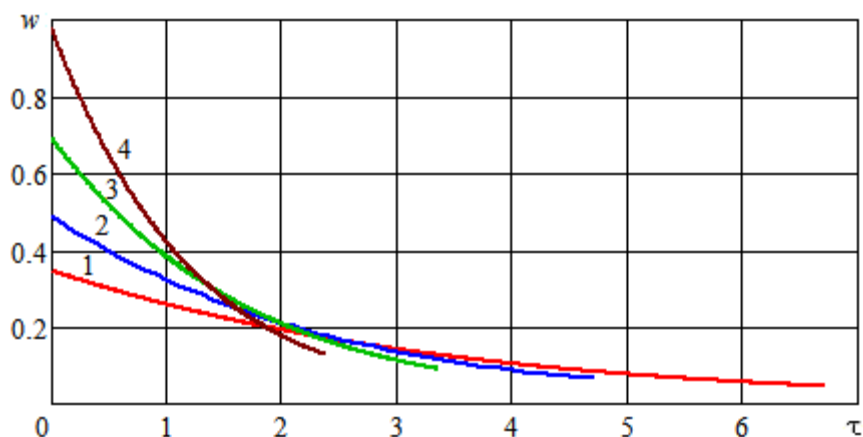


Рис. 10. Динамика средней скорости ЖШБ в трубе ($Str=0$) при разных значениях Ψ : 1 – $\Psi=2$, 2 – $\Psi=4$, 3 – $\Psi=8$, 4 – $\Psi=16$

Fig. 10. Dynamics of the SBL average velocity in the pipe ($Str=0$) at different values Ψ : 1 – $\Psi=2$, 2 – $\Psi=4$, 3 – $\Psi=8$, 4 – $\Psi=16$

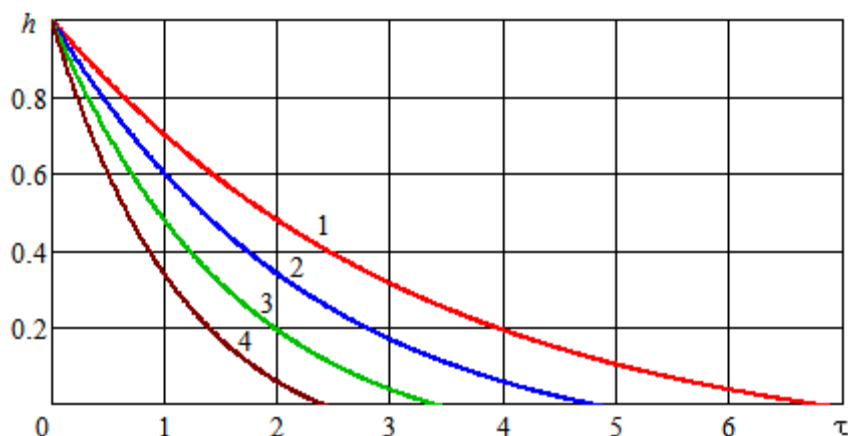


Рис. 11. Динамика уровня ЖШБ в резервуаре. Условия и обозначения, как на рис. 10

Fig. 11. Dynamics of the SBL level in the reservoir. Terms and designations, as shown in Fig. 10

Значения характерной скорости W_{M0} и критериев подобия Θ , Ψ и Re_0 зависят от реологических свойств РЖ. Они были рассчитаны по значениям η и σ для каждой стадии очистки РЖ и внесены в табл. 1 (столбцы 4–7). Из таблицы следует заметное различие значений указанных критериев подобия для стадий очистки. Исключение составляют лишь значения Θ у РЖГ и РЖН. Уменьшение Θ у РЖД по сравнению с РЖС составило 71 %, Ψ – 67,5 %, а вот значение Re_0 увеличилось примерно в 3 раза.

На рис. 12 показаны рассчитанные по формуле (4) зависимости БРЦТ r_0 от безразмерной глубины слоя РЖ в резервуаре h . Вид рис. 12 аналогичен рис. 2. Особенностью является то, что с каждой стадией очистки БРЦТ становится меньше, так как сказывается снижение значений η и σ , причем кривая 1 на рис. 12а, соответствующая РЖС, проходит заметно выше остальных.

Рис. 12b построен для РЖС при различных значениях a . По табл. 1 у РЖС $\Theta=0,798$; при значениях a меньших $0,798$ из резервуара может вытечь только часть РЖС. По рис. 12b это происходит до достижения $r_0 = 1$ (линии 1, 2, и 3). Для линий 4 и 5 условие $a > \Theta$ выполняется, поэтому резервуар освобождается полностью.

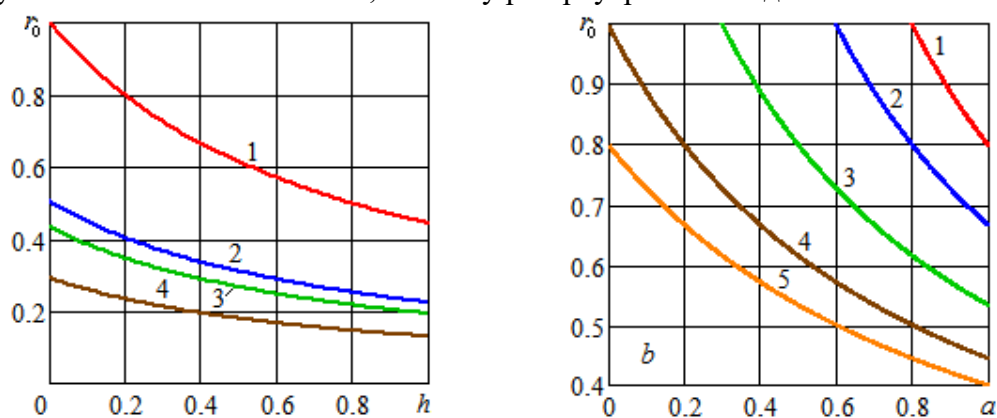


Рис. 12. Изменение БРЦТ течений РЖ; a – зависимость от h при $a = 0,8$: 1 – РЖС, 2 – РЖН, 3 – РЖО, 4 – РЖД; b – зависимость от h для РЖС при различных a : 1 – $a=0$; 2 – $a=0,2$; 3 – $a=0,5$; 4 – $a=0,8$; 5 – $a=1$

Fig. 12. DRCP change in the FO flows; a – dependence on h at $a = 0.8$: 1 – FOU, 2 – FON, 3 – FOB, 4 – FOD; b – dependence on h for FOU at different a : 1 – $a=0$; 2 – $a=0.2$; 3 – $a=0.5$; 4 – $a=0.8$; 5 – $a=1$

На рис. 13–16 представлены результаты расчета (в квазистационарном приближении) динамики слива РЖ из резервуара.

По рис. 13a истечение РЖС (линия 1) происходит значительно медленнее, чем других образцов РЖ. При $a=1$ полное освобождение резервуара с РЖС происходит за 4,3 мин, с РЖД – всего за 43 с. По рис. 13b безразмерная средняя скорость течения в трубе РЖС при полном резервуаре 0,95 (0,51 м/с), тогда как РЖД – 1,52 (1,43 м/с). Причина в том, что при течении РЖС из-за больших гидравлических потерь меньше потенциальной энергии столба жидкости идет на сообщение ей кинетической энергии по сравнению с другими образцами РЖ.

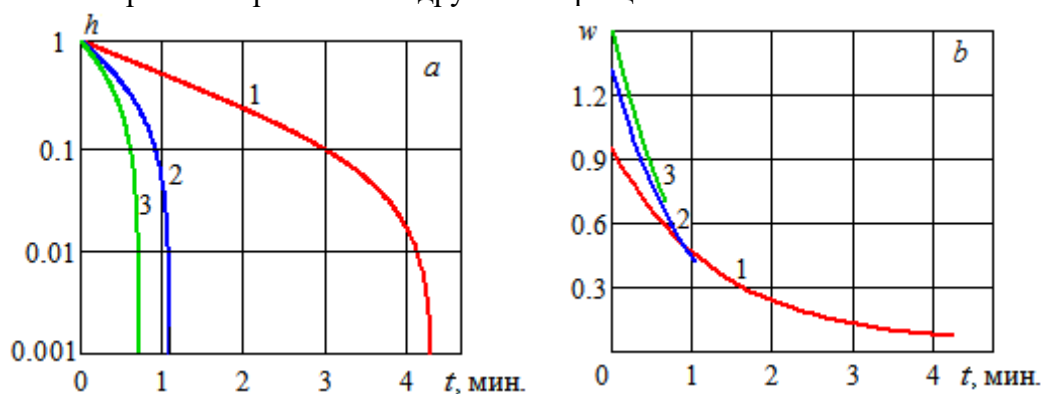


Рис. 13. Динамика слива РЖ из резервуара при $a=1$: a – безразмерный слой РЖ в резервуаре; b – безразмерная средняя скорость в трубе: 1 – РЖС, 2 – РЖН, 3 – РЖД

Fig. 13. Dynamics of the FO discharge from the tank at $a=1$:
 a – dimensionless layer of FO in the tank; b – dimensionless average velocity in the pipe: 1 – FOU, 2 – FON, 3 – FOD

По рис. 14а число Бингама течения в трубе РЖС в начальный момент равно 6,7, а в конечный – 89,7 (не показано на графике), тогда как РЖД, соответственно, 1,11 и 2,70. Значения $Bn > 1$ говорят о том, что для указанных течений нельзя использовать реологическую модель ньютоновской жидкости. По рис. 14b модифицированное число Рейнольдса течения в трубе РЖС в начальный момент равно 175, а в конечный всего 1,8, тогда как РЖД, соответственно, 1655 и 577. Значения $Re_B < 2000$ свидетельствуют, что течение происходит в ламинарном режиме при рассмотренном диапазоне параметров.

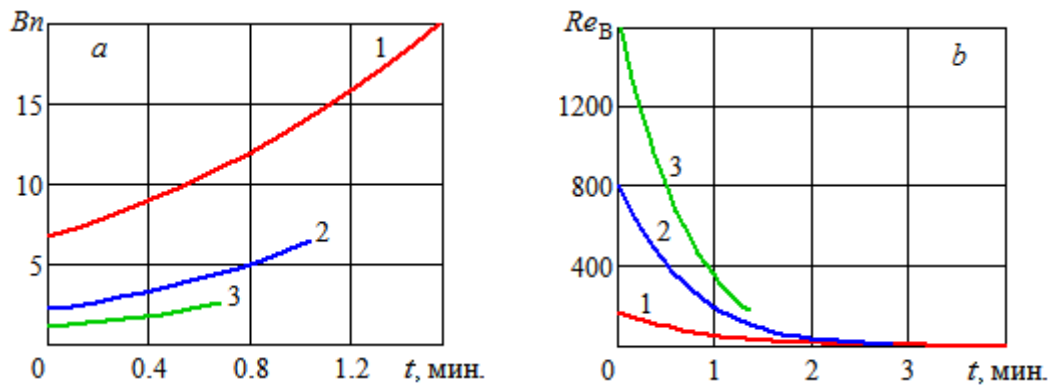


Рис. 14. Изменение чисел Бингама (a) и Рейнольдса (b) в процессе слива РЖ из резервуара при $a = 1$: 1 – РЖС, 2 – РЖН, 3 – РЖД

Fig. 14. Changing in the Bingham (a) and Reynolds (b) numbers during the FO discharge from the tank at $a = 1$: 1 – FOU, 2 – FON, 3 – FOD

По рис. 15а значение m течения в трубе РЖС в начальный момент равно 0,544, а в конечный снижается до 0,082; РЖД – с 0,879 до 0,747. По рис. 15b коэффициент Кориолиса течения в трубе РЖС в начальный момент равен 1,634, а в конечный снижается до 1,198; РЖД – с 1,911 до 1,806. Значения $m < 1$ и $\alpha < 2$ подтверждают необходимость использования в расчетах модель ЖШБ, но у течения РЖД значения m довольно близки к единице, а α – к двум. Поэтому применение реологической модели ньютоновской жидкости для РЖД приведет не к такой большой погрешности, как для РЖС.

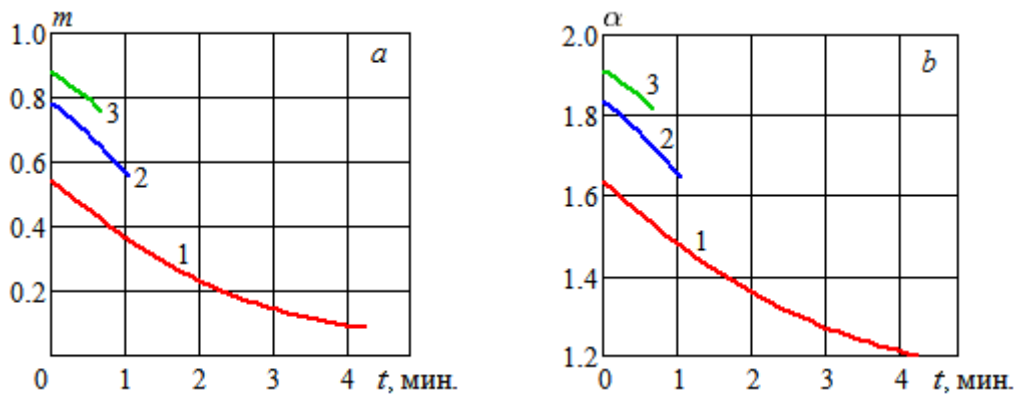


Рис. 15. Изменение значений m (a) и α (b) в процессе слива РЖ из резервуара при $a = 1$: 1 – РЖС, 2 – РЖН, 3 – РЖД

Fig. 15. Changing values of m (a) and α (b) numbers during the FO discharge from the tank at $a = 1$: 1 – FOU, 2 – FON, 3 – FOD

Зависимость времени полного освобождения резервуара t_E от a для трех образцов РЖ показана на рис. 16. Напомним, что величина a не должна быть меньше соответствующего значения Θ . Приближение a к этому значению приводит к резкому увеличению t_E . Каждая последующая стадия очистки влечет уменьшение t_E , но при прочих равных условиях величина t_E у РЖС заметно больше, чем у других образцов РЖ.

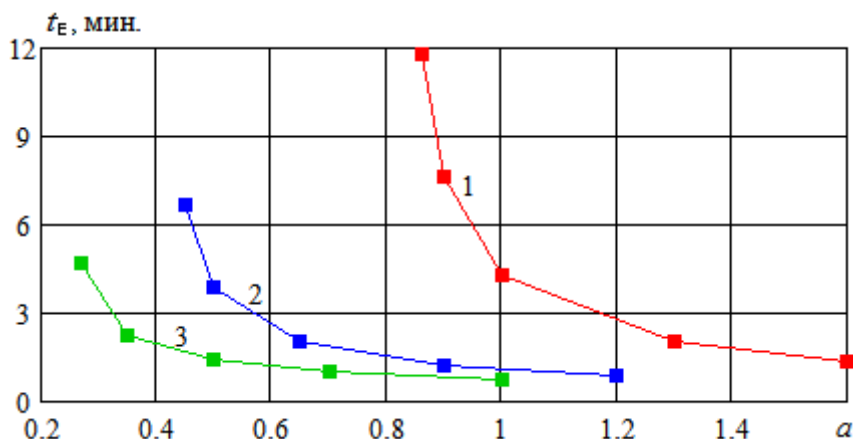


Рис. 16. Зависимость времени полного слива РЖ от a : 1 – РЖС, 2 – РЖН, 3 – РЖД
Fig. 16. Dependence of the time of complete FO discharge on a : 1 – FOU, 2 – FON, 3 – FOD

В табл. 2 представлены результаты расчета слива РЖС для пяти значений a . При увеличении значения a с 0,86 до 1,6 время полного опорожнения резервуара снижается с 11,77 до 1,36 мин. При полном резервуаре ($t=0$) средняя скорость возрастает с 0,440 до 0,818 м/с, Re_B – со 138 до 353, число Бингама уменьшается с 7,81 до 4,14, коэффициент Кориолиса – с 1,60 до 1,73. Эти изменения объясняются увеличением потенциальной энергии столба жидкости с возрастанием вертикального участка трубопровода.

Таблица 2. Результаты расчета истечения РЖС при изменении a
Table 2. Results of calculating the expiration of the FOU when changing a

a	t_E , мин.	$W(0)$, м/с	$W(t_E)$, м/с	$Bn(0)$	$\alpha(0)$	$Re_B(0)$
0,86	11,77	0,440	0,004	7,81	1,60	138
0,9	7,65	0,461	0,011	7,46	1,61	148
1,0	4,31	0,511	0,037	6,70	1,63	175
1,3	2,02	0,665	0,160	5,12	1,69	260
1,6	1,36	0,818	0,307	4,14	1,73	353

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, цель исследования достигнута, разработана математическая модель динамики слива ЖШБ из резервуара через цилиндрическую трубу в нестационарной постановке. Сформулированная система двух дифференциальных уравнений позволила определить 6 критериев подобия поставленной задачи Коши: Str , l , a , Ψ , Θ , Re_0 . Первые 3 критерия определяются геометрическими параметрами гидравлической системы, три последних зависят от реологических свойств ЖШБ.

Особенность задачи заключается в снижении перепада давления по мере уменьшения глубины слоя ЖШБ в резервуаре. Из-за указанного явления характеристики квазитвердого движения ЖШБ (r_0 , u_0 , w , α и др.) зависят от значений критериев подобия a , Θ и текущего значения h . Показано, что для полного слива ЖШБ из резервуара должно выполняться условие $a \geq \Theta$, в противном случае истечение прекратится при уменьшении относительной глубины до значения $h = \Theta - a$.

Задача Коши была решена численным методом. Результаты численного анализа показали, чем больше значение аналога числа Струхала Str , тем меньшая скорость течения в трубе w может быть достигнута и больше время ее достижения. При $Str < 1$ задачу можно решать в квазистационарном приближении, в каждый момент времени рассчитывать w по текущему значению h , как в стационарном течении.

В качестве примера была решена задача динамики слива образцов РЖ сома из резервуара после разных стадий обработки (очистки). Величина реологических параметров РЖ σ и η уменьшается при очистке, поэтому значения критериев подобия Ψ , Θ , Re_0 изменяются. Установлено, что время полного слива РЖ из резервуара t_E уменьшается по стадиям очистки, причем для РЖС это время значительно больше, чем у других образцов РЖ. Во всех исследованных условиях число Бингама оставалось больше единицы, что говорит о невозможности использования реологической модели ньютоновской жидкости. Рассчитанные значения модифицированного числа Рейнольдса подтвердили ламинарный режим течения РЖ в трубе.

Список источников

1. Махутова, О. Н. Незаменимые полиненасыщенные жирные кислоты в физиологии и метаболизме рыб и человека: значение, потребности, источники / О. Н. Махутова, М. И. Гладышев. – DOI: 10.31857/S0869813920050040 // Российский физиологический журнал им. И. М. Сеченова. – 2020. – Т. 106, № 5. – С. 601–621.
2. Advances in therapeutic applications of fish oil: A review / P. Das, A. Dutta, T. Panchali [et al.]. – DOI: 10.1016/j.meaf.2024.100142 // Measurement: Food. – 2024. – Vol. 13. – Paper ID 100142.
3. A sustainable source of freshwater fish oil: Nutritional and functional insights through lipidomics and metabolomics / P. W. Harlina, A. Y. Nasution, I. Musfiroh [et al.]. – DOI: 10.1016/j.lwt.2026.119046 // LWT – Food Science and Technology. – 2026. – Vol. 241. – Paper ID 119046.
4. Высокотехнологичные приемы переработки рыбного сырья, выращенного в Астраханской области / С. В. Золотокопова, Г. И. Касьянов, Е. Ю. Лебедева, А. Р. Айналиева. – DOI: 10.24143/2073-5529-2021-4-134-144 // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Рыбное хозяйство. – 2021. – № 4. – С. 134–144.
5. Current trends in production and processing of fish oil & its chemical analytical technologies: An overview / S. C. Vaska, P. Muralakar, H. Arunkumar [et al.]. – DOI: 10.48047/ecb/2023.12.si5a.049 // European Chemical Bulletin. – 2023. – Vol. 12. – P. 1705–1725.

6. Исследования по оптимизации ферментативного процесса выделения жира из вторичного рыбного сырья для использования в биотехнологии / О. Я. Мезенова, С. В. Агафонова, Н. Ю. Романенко [и др.]. – DOI: 10.17586/1606-4313-2024-23-3-43-55 // Вестник Международной академии холода. – 2024. – № 3. – С. 43–55.
7. Сравнительная оценка способов извлечения из вторичного рыбного сырья жира, предназначенного для синтеза продуктов биотехнологии / О. Я. Мезенова, С. В. Агафонова, Н. Ю. Романенко [и др.]. – DOI: 10.48612/dalrybvtuz/2025-71-07 // Научные труды Дальрыбвтуза. – 2025. – Т. 71, № 1. – С. 59–71.
8. Харитонов, Е. Л. Кормовые и метаболические факторы формирования жирнокислотного состава молока у коров / Е. Л. Харитонов, Д. Е. Панюшкин // Проблемы биологии продуктивных животных. – 2016. – № 2. – С. 76–106.
9. Malaweera, B. O. Use of seafood processing by-products in the animal feed industry / B. O. Malaweera, W. M. N. M. Wijesundara // Seafood Processing By-Products. Edit. S.K. Kim. – New York: Springer, 2014. – P. 315–339. – ISBN-13978-1461495895.
10. Optimizing omega-3 polyunsaturated fatty acids for healthy ageing: Human intake evidence and dairy cow dietary interventions for milk enrichment / M. Dimopoulou, P. Madesis, A. Dimopoulou, O. Gortzi. – DOI: 10.3390/foods15061079 // Foods. – 2026. – Vol. 15, № 6. – Piper ID 1079.
11. Технология жиров из биологических ресурсов: моногр. / Н. П. Боева, О. В. Бредихина, М. С. Петрова, Ю. А. Баскакова. – Москва: Изд-во ВНИРО, 2016. – 107 с. – ISBN 978-5-85382-475-1.
12. Разработка технологии переработки жировых отходов в продукты технического назначения / С. М. Гайдар, А. М. Пикина, О. М. Лапсарь, И. Г. Голубев. – DOI: 10.33267/2072-9642-2023-3-32-35 // Техника и оборудование для села. – 2023. – № 3 (309). – С. 32–35.
13. Петров, Б. Ф. Экологические аспекты производства рыбного жира в России / Б. Ф. Петров. – DOI: 10.36038/0131-6184-2024-1-114-121 // Рыбное хозяйство. – 2024. – № 1. – С. 114–121.
14. Akhmedova, N. R. Influence of liquid food products viscosity on lobe pump performance (case of pumping fish oil) / N. R. Akhmedova, O. I. Levicheva, V. A. Naumov. – DOI: 10.24143/2073-5529-2022-3-74-81 // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing Industry. – 2022. – № 3. – P. 74–81.
15. Velikanov, N. L. Transportation of fish oil through a pipeline by a single-screw pump / N. L. Velikanov, V. A. Naumov. – DOI: 10.24143/2073-5529-2024-3-95-101 // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing industry. – 2024. – № 3. – P. 95–101.
16. Effects of purification process on rheological properties of Catfish oil / S. Sathivel, W. Prinyawiwatkul, I. I. Negulescu [et al.]. – DOI: 10.1007/s11746-003-0780-3 // Journal of the American Oil Chemists' Society. – 2003. – Vol. 80, № 8. – P. 829–832.
17. Comparisons of chemical and physical properties of Catfish oils prepared from different extracting processes / S. Sathivel, H. Yin, W. Prinyawiwatkul, J. M. King. – DOI: 10.1111/J.1750-3841.2009.01050.X // Journal of Food Science. – 2009. – Vol. 74, № 2. – P. E70–E76.

18. Гноевой, А. В. Основы теории течений бингамовских сред: моногр. / А. В. Гноевой, Д. М. Климов, В. М. Чесноков. – Москва: Физматлит, 2004. – 272 с. – ISBN: 5-9221-0566-3.
19. Шаповалов, В. М. Задача Гретца-Нуссельта для жидкости Бингама / В. М. Шаповалов. – DOI: 10.1134/S0040364419030165 // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57, № 3. – С. 446–452.
20. Исследование установившегося течения вязкопластического битумного вяжущего, описываемого моделью Шведова–Бингама, в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. Р. Сабылина [и др.]. – DOI: 10.31675/1607-1859-2019-21-3-158-177 // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2019. – Т. 21, № 3. – С. 158–177.
21. Fusi, L. Flow of a Bingham fluid in a pipe of variable radius / L. Fusi, K. D. Housiadas, G. C. Georgiou. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2020.104393 // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2020. – Vol. 285, № 2. – Paper ID 104393.
22. Кумицкий, Б. М. Реологическая модель процесса формования листового гипсокартона / Б. М. Кумицкий, Е. С. Аралов, С. Г. Тульская. – DOI: 10.36622/VSTU.2022.67.3.006 // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2022. – № 3 (67). – С. 61–70.
23. Modeling the flow of a Bingham plastic fluid through a circular pipeline with different wall properties / A. Zadorozhnyi, Y. Chovnyuk, O. Stakhovsky [et al.]. – DOI: 10.1063/5.0124547 // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2490. – Paper ID 050028.
24. Exact solution of tank drainage for Bingham fluid flow circular tube / G. M. Oghai, M. Kamran, S. F. Shah, A. A. Amur. – DOI: 10.21015/vtm.v12i1.1737 // VFAST Transactions on Mathematics. – 2024. – Vol. 12, № 1. – P. 60–70.
25. Series solution of unsteady tank drainage for third order fluid using Adomian decomposition method / S. A. Malik, S. F. Shah, K. N. Memon [et al.]. – DOI: 10.21015/vtm.v12i1.1762 // VFAST Transactions on Mathematics. – 2024. – Vol. 12, № 1. – P. 137–139.
26. Наумов, В. А. Нестационарное истечение плавленого сыра из емкости через цилиндрический трубопровод / В. А. Наумов // Вестник науки и образования Северо-Запада России. – 2026. – Т. 12, № 1. – С. 28–38.
27. Наумов, В. А. Анализ нестационарной математической модели простой гидравлической сети с центробежным насосом / В. А. Наумов. – DOI: 10.17588/2072-2672.2020.4.064-070 // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2020. – № 4. – С. 64–70.
28. Csizmadia, P. The effect of rheology model of an activated sludge on to the predicted losses by an elbow / P. Csizmadia, S. Till. – DOI: 10.3311/PPme.12348 // Periodica Polytechnica. Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 62, № 4. – P. 305–311.
29. Bibok, M. Experimental and numerical investigation of the loss coefficient of a 90° pipe bend for power-law fluid / M. Bibok, P. Csizmadia, S. Till. – DOI: 10.3311/PPch.14346 // Periodica Polytechnica. Chemical Engineering. – 2020. – Vol. 64, № 4. – P. 469–478.

References

1. Makhutova, O. N. Essential polyunsaturated fatty acids in the physiology and metabolism of fish and humans: meaning, needs, sources / O. N. Makhutova, M. I. Gladyshev – DOI: 10.31857/S0869813920050040 // I. M. Sechenov Russian Journal of Physiology. – 2020. – Vol. 106, № 5. – P. 601–621.
2. Advances in therapeutic applications of fish oil: A review / P. Das, A. Dutta, T. Panchali [et al.]. – DOI: 10.1016/j.meaf.2024.100142 // Measurement: Food. – 2024. – Vol. 13. – Paper ID 100142.
3. A sustainable source of freshwater fish oil: Nutritional and functional insights through lipidomics and metabolomics / P. W. Harlina, A. Y. Nasution, I. Musfiroh [et al.]. – DOI: 10.1016/j.lwt.2026.119046 // LWT – Food Science and Technology. – 2026. – Vol. 241. – Paper ID 119046.
4. High-tech methods of processing fish raw materials grown in the Astrakhan region / S. V. Zolotokopova, G. I. Kasyanov, E. Y. Lebedeva, A. R. Ainalieva. – DOI: 10.24143/2073-5529-2021-4-134-144 // Bulletin of the Astrakhan State Technical University. Series: Fisheries. – 2021. – № 4. – P. 134–144.
5. Current trends in production and processing of fish oil & its chemical analytical technologies: An overview / S. C. Vaska, P. Muralakar, H. Arunkumar [et al.]. – DOI: 10.48047/ecb/2023.12.si5a.049 // European Chemical Bulletin. – 2023. – Vol. 12. – P. 1705–1725.
6. Studies on optimizing the enzymatic process of fat extraction from secondary fish raw materials for use in biotechnology / O. Ya. Mezenova, S. V. Agafonova, N. Yu. Romanenko [et al.]. – DOI: 10.17586/1606-4313-2024-23-3-43-55 // Bulletin of the International Academy of Refrigeration. – 2024. – № 3. – P. 43–55.
7. Comparative assessment of methods for extracting fat from secondary fish oil intended for the synthesis of biotechnology products / O. Ya. Mezenova, S. V. Agafonova, N. Yu. Romanenko [et al.]. – DOI: 10.48612/dalrybvtuz/2025-71-07 // Scientific works of Dalrybvtuz. – 2025. – Vol. 71, № 1. – P. 59–71.
8. Kharitonov, E. L. Feed and metabolic factors of the formation of fatty acid composition of milk in cows / E. L. Kharitonov, D. E. Panyushkin // Problems of biology of productive animals. – 2016. – № 2. – P. 76–106.
9. Malaweera, B. O. Use of seafood processing by-products in the animal feed industry / B. O. Malaweera, W. M. N. M. Wijesundara // Seafood Processing By-Products. Edit. S.K. Kim. – New York: Springer, 2014. – P. 315–339. – ISBN-13978-1461495895.
10. Optimizing omega-3 polyunsaturated fatty acids for healthy ageing: Human intake evidence and dairy cow dietary interventions for milk enrichment / M. Dimopoulou, P. Madesis, A. Dimopoulou, O. Gortzi. – DOI: 10.3390/foods15061079 // Foods. – 2026. – Vol. 15, № 6. – Piper ID 1079.
11. Technology of fats from biological resources: monogr. / N. P. Boeva, O. V. Bredikhina, M. S. Petrova, Yu. A. Baskakova. – Moscow: VNIRO Publ. House, 2016. – 107 p. ISBN 978-5-85382-475-1.
12. Development of technology for processing fat waste into technical products / S. M. Gaidar, A. M. Pikina, O. M. Lapsar, I. G. Golubev. – DOI: 10.33267/2072-9642-2023-3-32-35. // Machinery and equipment for rural areas. – 2023. – № 3 (309). – P. 32–35.

13. Petrov, B. F. Ecological aspects of fish oil production in Russia / B. F. Petrov. – DOI: 10.36038/0131-6184-2024-1-114-121 // Fisheries. – 2024. – № 1. – P. 114–121.
14. Akhmedova, N. R. Influence of liquid food products viscosity on lobe pump performance (case of pumping fish oil) / N. R. Akhmedova, O. I. Levicheva, V. A. Naumov. – DOI: 10.24143/2073-5529-2022-3-74-81 // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing Industry. – 2022. – № 3. – P. 74–81.
15. Velikanov, N. L. Transportation of fish oil through a pipeline by a single-screw pump / N. L. Velikanov, V. A. Naumov. – DOI: 10.24143/2073-5529-2024-3-95-101 // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Fishing industry. – 2024. – № 3. – P. 95–101.
16. Effects of purification process on rheological properties of Catfish oil / S. Sathivel, W. Prinyawiwatkul, I. I. Negulescu [et al.]. – DOI: 10.1007/s11746-003-0780-3 // Journal of the American Oil Chemists' Society. – 2003. – Vol. 80, № 8. – P. 829–832.
17. Comparisons of chemical and physical properties of Catfish oils prepared from different extracting processes / S. Sathivel, H. Yin, W. Prinyawiwatkul, J. M. King. – DOI: 10.1111/J.1750-3841.2009.01050.X // Journal of Food Science. – 2009. – Vol. 74, № 2. – P. E70–E76.
18. Gnoevoy, A. V. Fundamentals of the theory of flows of Bingham media: monogr. / A. V. Gnoevoy, D. M. Klimov, V. M. Chesnokov. – Moscow: Fizmatlit, 2004. – 272 p. – ISBN 5-9221-0566-3.
19. Shapovalov, V. M. The Gretz-Nusselt problem for Bingham liquids / V. M. Shapovalov. – DOI: 10.1134 / s0040364419030165 // High temperature thermophysics. – 2019. – Vol. 57, № 3. – P. 446–452.
20. Investigation of the steady flow of a viscoplastic bitumen binder described by the Shvedov–Bingham model in a cylindrical pipe / O. V. Matvienko, V. P. Bazuev, N. R. Sabylina [et al.]. – DOI: 10.31675/1607-1859-2019-21-3-158-177 // Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. – 2019. – Vol. 21, № 3. – P. 158–177.
21. Fusi, L. Flow of a Bingham fluid in a pipe of variable radius / L. Fusi, K. D. Housiadas, G. C. Georgiou. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2020.104393 // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2020. – Vol. 285, № 2. – Paper ID 104393.
22. Kumitsky, B. M. Rheological model of the sheet drywall forming process / B. M. Kumitsky, E. S. Aralov, S. G. Tulskeya. – DOI: 10.36622/VSTU.2022.67.3.006 // Scientific Journal of Construction and Architecture. – 2022. – № 3 (67). – P. 61–70.
23. Modeling the flow of a Bingham plastic fluid through a circular pipeline with different wall properties / A. Zadorozhnyi, Y. Chovnyuk, O. Stakhovsky [et al.]. – DOI: 10.1063/5.0124547 // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2490. – Paper ID 050028.
24. Exact solution of tank drainage for Bingham fluid flow circular tube / G. M. Oghai, M. Kamran, S. F. Shah, A. A. Amur. – DOI: 10.21015/vtm.v12i1.1737 // VFAST Transactions on Mathematics. – 2024. – Vol. 12, № 1. – P. 60–70.
25. Series solution of unsteady tank drainage for third order fluid using Adomian decomposition method / S. A. Malik, S. F. Shah, K. N. Memon [et al.]. –

DOI: 10.21015/vtm.v12i1.1762 // VFAST Transactions on Mathematics. – 2024. – Vol. 12, № 1. – P. 137–139.

26. Naumov, V. A. Unsteady outflow of processed cheese from a container through a cylindrical pipeline / V. A. Naumov // Bulletin of Science and Education of the North-West of Russia. – 2026. – Vol. 12, № 1. – P. 28–38.

27. Naumov, V. A. Analysis of a non-stationary mathematical model of a simple hydraulic network with a centrifugal pump / V. A. Naumov. – DOI: 10.17588/2072-2672.2020.4.064-070 // Bulletin of the Ivanovo State Power Engineering University. – 2020. – № 4. – P. 64–70.

28. Csizmadia, P. The effect of rheology model of an activated sludge on to the predicted losses by an elbow / P. Csizmadia, S. Till. – DOI: 10.3311/PPme.12348 // Periodica Polytechnica. Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 62, № 4. – P. 305–311.

29. Bibok, M. Experimental and numerical investigation of the loss coefficient of a 90° pipe bend for power-law fluid / M. Bibok, P. Csizmadia, S. Till. – DOI: 10.3311/PPch.14346 // Periodica Polytechnica. Chemical Engineering. – 2020. – Vol. 64, № 4. – P. 469–478.

Информация об авторе

В. А. Наумов – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ КГТУ

Information about the author

V. A. Naumov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Department of Research and Development of KSTU

Статья поступила в редакцию 01.06.2026; одобрена после рецензирования 11.06.2026; принята к публикации 20.06.2026.

The article was submitted 01.06.2026; approved after reviewing 11.06.2026; accepted for publication 20.06.2026.